NUMERI COMPLESSI

- RADICI COMPLESSE DI $6z^2-(3+i)z+1-i$ — CALCOLO IL Δ DELL'EQ. DI II GRADO (b^2-4ac)

① $\Delta = (3+i)^2-4(6)(1-i) = -16+30i$

② IMPONGO $(a+bi)^2=\Delta$: $(a+bi)^2 = 30i-16 \rightarrow a^2-b^2+2abi = 30i-16$ → ③ SCRIVO COSÌ IL SISTEMA TROVANDO 2 h: $\begin{cases} a^2-b^2=-16 \\ a\cdot b = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ b=5 \end{cases}$ ↗ $\rightarrow$

④ TERMINO CON LA RISOLUZ. DI UNA NORMALE EQ. DI II GRADO.

$$\frac{3+i \pm 3+5i}{12} = \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(1+i) \\ z_2 = \frac{3+i-3-5i}{12} = -\frac{1}{3}i \end{cases}$$

- SE DUE NUMERI COMPLESSI HANNO MODULI $3\sqrt{5}$ E 10 CHE MODULO HA IL LORO PRODOTTO?

- IL PRODOTTO DEI MODULI: $3\sqrt{5}\cdot 10 = 3\sqrt{5\cdot 10} = 3\sqrt{50} = 3\sqrt{25}\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$ ✓

- NEL CASO DI UN'EQ. CON $\bar{z}$ AD ES: $z^3\bar{z}+8i = 2z(z+2i\bar{z})$ RICORDA CHE: $z\cdot\bar{z} = |z|^2$!

$|z|^2z^2+8i-4z^2-4i|z|^2=0 \quad z^2(|z|^2-4)-4i(|z|^2-4)=0 \quad (z^2-4i)(|z|^2-4)=0 \quad z^2=4i \text{ o } |z|^2=4$

$z_{1,2}=\pm \qquad |z|=2$

- NB: $(\alpha+i\beta)^{-1} = \frac{\alpha+i\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

- TROVARE $z\in\mathbb{C}$ T.C. $\begin{pmatrix}1-4i\\2+i\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2+i\\3-2i\end{pmatrix}$ lin. dipendenti?

NB: $\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=0$

$$\det\begin{pmatrix}1-4i & 2+i\\ 2-i & 3-2i\end{pmatrix} = (1-4i)(3-2i)-(2+i)(2-i) = 0$$

$$-2(2+i) = 6(2i+1), \quad z = -\frac{6(2i+1)}{2+i}$$

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

POSIZIONE RECIPROCA

$$E=\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\\3\end{pmatrix}+\text{SPAN}\left(\begin{pmatrix}3\\-2\\7\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\4\end{pmatrix}\right) \qquad F=\begin{cases}x-4y-3z+6w=4\\-4x+5y+3z+w=-7\end{cases} \quad :\text{IN } \mathbb{R}^4$$

$E \cap F$? PERCHÈ SI INTERSECHINO $\exists$ $\vec{v}$ GENERICO $\in E$ t.c. SOSTITUENDO LE COMPONENTI (DI $\vec{v}$ GENERICO, IN F, OTTENUTE IN COEFFICIENTI $\alpha,\beta,\dots$) DIANO α E β
(SE $E \cap F$ ALLORA IL SISTEMA FINALE NON TORNERÀ)

SCRIVERE UN GENERICO VETTORE IN FUNZIONE $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ CON $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$!

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}3\\-2\\7\\5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\\3\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}x=3\alpha+\beta+3 & z=7\alpha+3\beta-4\\ y=-2\alpha-\beta-1 & w=5\alpha+4\beta+3\end{matrix}$$

SOSTITUZIONE

$$F=\begin{cases}3\alpha+\beta+3-4(-2\alpha-\beta-1)-3(7\alpha+3\beta-4)+6(5\alpha+4\beta+3)\\-4(3\alpha+\beta+3)+5(-2\alpha-\beta-1)+3(7\alpha+3\beta-4)+5\alpha+4\beta+3\end{cases}$$

SE IL SISTEMA "NON TORNA" ⇒ I DUE PIANI SONO DISGIUNTI, $E \cap F$

$E \parallel F$? PERCHÈ $E \parallel F$ ALLORA $\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4)=0$ $\quad \vec{v}_1,\vec{v}_2 \in E$, $\vec{v}_3,\vec{v}_4 \in F$

- TRASFORMIAMO F IN PARAMETRICA: ① CANCELLANDO w: $a_1=1$ $b_1=-4$ $c_1=-3$; $a_2=-4$ $b_2=5$ $c_2=3$ $\longrightarrow \begin{pmatrix}3\\9\\-20\\0\end{pmatrix}$

NB: $\begin{pmatrix}b_1c_2-b_2c_1\\-a_1c_2+a_2c_1\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$

CANCELLANDO x: $a_1=-4$ $b_1=-3$ $c_1=6$; $a_2=5$ $b_2=3$ $c_2=1$ $\longrightarrow \begin{pmatrix}0\\-21\\34\\3\end{pmatrix}$

- CALCOLIAMO IL $\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4)$ =

$$\det\begin{pmatrix}3&1&3&0\\-2&-1&9&-21\\7&3&-20&34\\5&4&0&3\end{pmatrix}=3\det\begin{vmatrix}-1&9&-21\\3&-20&34\\4&0&3\end{vmatrix}+2\det\begin{vmatrix}1&3&0\\3&-20&34\\4&0&3\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}1&3&0\\-1&9&-21\\4&0&3\end{vmatrix}-5\det\begin{vmatrix}1&3&0\\-1&9&-21\\3&-20&34\end{vmatrix}$$

$= 165 \neq 0$ NON SONO $\parallel$

NB: PER PROVARE CHE $E \oplus F = \mathbb{R}^3$ VERIFICHIAMO SE $E \cap F = \{0\}$? SE IL SISTEMA FINALE DÀ $\emptyset$ ALLORA E ED F SONO IN SOMMA DIRETTA ✓

$$E_u=\begin{pmatrix}u\\2\\-1\\3u+1\end{pmatrix}+\text{SPAN}\left(\begin{pmatrix}u+1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\u-1\\1\\u+1\end{pmatrix}\right)$$

- TROVARE u_0 PER IL QUALE E_{u_0} PASSA PER 0 DOPO AVER TRASPORTATO E_u IN UGUAGLIANZE

$$\downarrow$$

$$E_u=\begin{cases}x_1-x_2+x_3=2u-2\\x_2+2x_3-x_4=3-3u\end{cases}$$

PORTIAMO LA PARTE "A DESTRA" DELL'EQUAZIONE, IL "RESTO" $=0$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases}2u-2=0\\3-3u=0\end{cases}\begin{matrix}u=1\\u=1\end{matrix}\Big\} \; u_0=1$$

mdsp copy 050/835126 388/9...745

POSIZIONE RECIPROCA

DATE 2 RETTE: $E = v_0 + \text{SPAN}(v_1)$ $F = v_0 + \text{SPAN}(v_2)$ E∩F IN UN PUNTO $\dim(E+F) = 2$
E∩F, E∥F $\dim(E+F) = 1$

SE $\det(v_1, v_2) = 0$ SONO $\parallel \in \mathbb{R}^2$

SE $\det(v_1, v_2) \neq 0$ SONO SGHEMBE $\in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \dim(E+F) = 3$ $\dim(E+F) = 1 + \dim(W+Z)$

DATA UNA RETTA E UN PIANO: $E = v_0 + \text{SPAN}(v_1)$ $F = v_0 + \text{SPAN}(v_2, v_3)$

SE $\det(v_1, v_2, v_3) = 0$ SONO $\parallel$ $\in \mathbb{R}^3$

SE $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ SONO INCIDENTI $\in \mathbb{R}^3$

SE $\in \mathbb{R}^4$, $\det \neq 0$, O SI INTERSECANO O SONO SGHEMBE

DATI 2 PIANI: $E = v_0 + \text{SPAN}(v_1, v_2)$ $F = v_0 + \text{SPAN}(v_3, v_4)$

SE $\det(v_1, v_2, v_3)$ E $\det(v_1, v_2, v_4) = 0$ I 2 PIANI SONO $\parallel$ (ANCHE SE HANNO GLI STESSI VALORI DI h E K SONO $\parallel$)

SE $\det$, $\det \neq 0$ $\in \mathbb{R}^3$ SI INTERSECANO

SE $\det$, $\det \neq 0$ $\in \mathbb{R}^4$ S'INTERSECANO O SONO SGHEMBE

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

DETERMINANTI

①

$\det A = -\frac{1}{3}$ $B = (2\sqrt{3}-\sqrt{1}, 3\sqrt{4}, \sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}, \sqrt{1}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{4})$ $A = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4})$ $\det B$? $\longrightarrow$ $\det B = 1$

$\det B = \det A \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} =$ "TEOREMA DEGLI ORLATI" $= \det A \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$ " " $= 1 \cdot 3 \cdot \det A \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

$= 3 \cdot -\frac{1}{3} = +1$

NB: CANCELLANDO UNA RIGA ED UNA COLONNA CHE MI INDICANO UN NUMERO DI POSTO DISPARI DEVO CAMBIARE IL SEGNO AL h INDICATO.

② ORLATE DI $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ IN $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$: 2 colonne = 2 orlate I: $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ II: $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

③ $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (III riga) (I colonna) CALCOLARE $A^{-1}_{2,3}$: $\det A = -1(-3+4) - 1(2+6) + 1(4+9) = 2$ $A^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det A} \cdot$ det ORLATA i,j DI A

$A^{-1}_{23} = \frac{-1^5}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$

④ PER QUALI VALORI DI k $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & k \\ 2 & k & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 9$? ① $\det = 3(k-2) - 2(1-2k) - 1(1-k^2) = 3k - 6 - 2 + 4k - 1 + k^2 =$

$k^2 + 7k - 9 = 9 \longrightarrow k^2 + 7k - 18 = 0$ ② $\Delta = b^2 - 4ac = 121$

③ $k = \frac{-7 \pm 11}{2}$ $k_1 = -9$ $k_2 = +2$

⑤ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det(A+B) = \det A + \det B \}$ $\dim X = ?$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\det A = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{21} \cdot a_{12})$; $\det B = 1$; $(A+B) = \begin{pmatrix} a_{11}+1 & a_{21}+1 \\ a_{12}+0 & a_{22}+1 \end{pmatrix}$

$\det(A+B) = (a_{11}+1)(a_{22}+1) - (a_{21}+1)(a_{12}) = a_{11}a_{22} + a_{11} + a_{22} + 1 - a_{22}a_{21} - a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + 1$

$\dim(A+B)$ $= \dim A + \dim B$

$a_{11} + a_{22} = a_{12}$ $\dim X = 2 - 1 = 3$

⑥ $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$: $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ① $\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ② $\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ TRASPOSTA $= A^{-1} = \frac{1}{\det} \cdot T = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$ ③

$\det = 4 \times 5 - (-3)(-7) = -1$ MATRICE DEI MINORI

NB: SE $\det = 0$ NON È INVERTIBILE

NBB: PER L'INVERSA DI UNA MATRICE 3×3 NON SI FA LO SCAMBIO A CROCE MA:

ES. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ $\det(5\times 9) - (6 \cdot 8)$

① SCAMBIO A CROCE
② CAMBIO I SEGNI SE h colonna + h riga = dispari
③ INVERTO RIGA - COLONNA
④ $A^{-1} = \frac{1}{\det} \cdot$ TRASPOSTA

www.master-cox.it 050/8312126 - 3358837745 COX

BASI

- METODO RISOLUTIVO DI: $[f]^C_\beta$ $\quad f(v_1)=w_1 \quad f(v_2)=w_2 \quad f(v_3)=w_3$

DATI $\beta(z_1, z_2, z_3)$ E $C(v_1, v_2, v_3)$

$$f(z_1) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) + \gamma f(v_3)$$

$$\downarrow$$

$z_1 = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$ TROVO α, β, γ RISOLVENDO IL SISTEMA E INSERISCO I VALORI TROVATI IN:

$f(z_1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ TROVO COSÌ IL "NUOVO" $f(z_1)$ E LO ESPRIMO IN COORDINATE RISPETTO A C

$$\downarrow$$

$$"f(z_1)"^C = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$$

- ESIBIRE UNA BASE DI X_k, $k=3$:

① RISOLVERE IL SISTEMA TROVANDO x_1, x_2, x_4 IN FUNZIONE DI x_3

$$x_3 \begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+3x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \\ -x_1+5x_3+3x_4=0 \end{cases} \begin{cases} 10x_3+6x_4+6x_3+x_4+4x_3+3x_4=0 \\ x_1=x_2-x_3+2x_4 \\ -x_2+x_3-2x_4+5x_3+3x_4=0 \end{cases} \begin{cases} 20x_3+10x_4=0 \\ x_1=6x_3+x_4-x_3+2x_4 \\ x_2=6x_3+x_4 \end{cases} \begin{cases} x_4=-2x_3 \\ x_1=5x_3+3x_4 \\ x_2=6x_3+x_4 \end{cases} \begin{cases} x_4=-2x_3 \\ x_1=-x_3 \\ x_2=4x_3 \end{cases}$$

$$X_3 = \text{SPAN}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}$$

② TROVATI I VALORI SCRIVERE UNA BASE

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745